



DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

# Exame Geral de Doutorado

Primeiro Semestre de 2016

## Mecânica Clássica

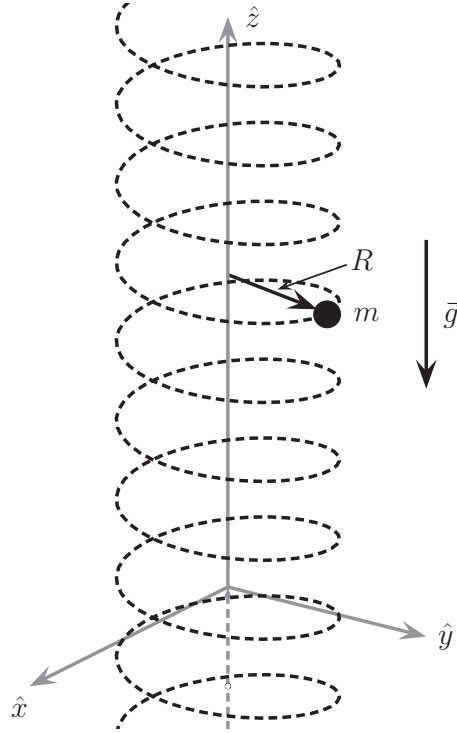
11/3/2016 - 9h às 12h

(Escolha três dentre as quatro questões.)

### QUESTÃO 1: Formalismo Lagrangeano e Hamiltoniano

A figura abaixo ilustra uma pequena *conta esférica* (esfera contendo um pequeno furo) de massa  $m$ , que se move *sem atrito* através de uma hélice de raio  $R$ .

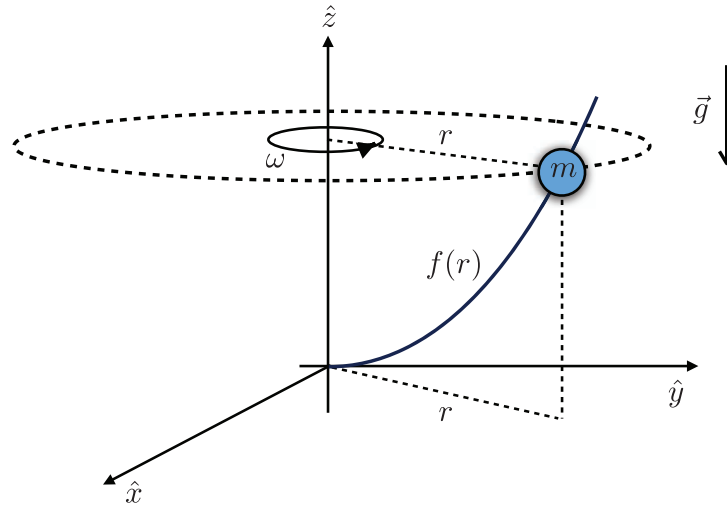
A equação da hélice, em coordenadas cilíndricas  $(\rho, \phi, z)$ , é dada por  $\rho = R$  e  $z = k\phi$ , onde  $k$  é uma constante positiva. A aceleração da gravidade no local é denotada por  $\vec{g} = -g\hat{z}$ .



- (a) (40%) Obtenha a lagrangeana do sistema em termos de  $z$  e  $\dot{z} = dz/dt$  e das constantes  $m$ ,  $g$ ,  $k$  e  $R$ .  
Use a equação de Euler-Lagrange e calcule as equações de movimento da conta esférica. Encontre as soluções  $z = z(t)$  e  $\phi = \phi(t)$ , considerando  $z(0) = z_0$  e  $\dot{z}(0) = \dot{z}_0$ .
- (b) (40%) Utilizando agora o método dos multiplicadores de Lagrange, reobtenha a equação de movimento para a coordenada  $z$  obtida no item (a).
- (c) (20%) Calcule as componentes da força generalizada de vínculo que atua sobre a conta esférica.

**QUESTÃO 2: Equações de Hamilton**

Uma conta esférica de massa  $m$  desliza sem atrito, sob efeito da gravidade  $\vec{g} = -g\hat{z}$ , ao longo de um arame curvo com a forma  $z = f(r)$ , como indicado na figura, com  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .



O arame gira, mantendo sua forma fixa, em torno do eixo  $z$  com velocidade angular constante  $\omega$ .

- (a) (20%) Escreva a expressão para a lagrangeana  $L(r, \dot{r}, t)$  para esse sistema. Obtenha a equação de movimento para  $r(t)$ .
- (b) (40%) Encontre, a partir da equação de movimento obtida no item acima, a relação em termos do raio  $r_0$  para a condição para existência de órbita circular fechada ( $r = r_0 = \text{constante}$ ).
- (c) (40%) Escreva a hamiltoniana  $H(r, p_r, t)$  e mostre que esta é conservada. Escreva a expressão para a energia total do sistema e compare com a expressão da hamiltoniana. Explique qual a origem do termo extra da energia total.

### QUESTÃO 3: Transformações Canônicas e Equação de Hamilton-Jacobi

Considere uma partícula cuja dinâmica é descrita pela seguinte hamiltoniana

$$H(q, p, t) = \frac{p^2}{2} - \gamma q - \frac{\gamma^2 t^2}{2},$$

onde  $\gamma > 0$  é uma constante.

- (a) (20%) Resolva as equações de Hamilton para tal sistema considerando as seguintes condições iniciais:

$$q(0) = q_0 \quad \text{e} \quad p(0) = p_0.$$

- (b) (30%) Verifique, usando o formalismo dos colchetes de Poisson, que a seguinte transformação é *canônica*:

$$Q = q - pt + \frac{\gamma t^2}{2} \quad \text{e} \quad P = p - \gamma t.$$

Em seguida, calcule a expressão da *função geradora* do tipo  $F_2(q, P, t)$  associada à transformação acima e verifique que a mesma pode ser escrita na forma

$$F_2 = (P + \gamma t)q - \frac{P^2 t}{2} - \frac{P \gamma t^2}{2}.$$

- (c) (30%) Utilizando a função geradora do item (b), calcule a expressão da nova hamiltoniana  $K(Q, P, t)$  do sistema.

Resolva as equações de Hamilton para  $K(Q, P, t)$  e, então, obtenha novamente as equações de movimento  $q(t)$  e  $p(t)$  em termos das condições iniciais  $q_0$  e  $p_0$  fornecidas no item (a).

- (d) (20%) Verifique se a *função geradora* do item (b) satisfaz à equação de Hamilton-Jacobi.

Dados:

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}, \quad p = \frac{\partial F_2}{\partial q}.$$

### Questão 4: Cinemática de Corpos Rígidos

Considere o sistema de duas partículas de massas idênticas  $m$  conectadas por uma haste rígida de comprimento  $\ell$ , de tal maneira que as massas podem se mover livremente, porém mantendo *fixa* sua distância relativa. O sistema está sujeito ao campo gravitacional  $\vec{g} = -g\hat{z}$ . Sejam  $\{x_i, y_i, z_i\}$ ,  $i = 1, 2$  as coordenadas cartesianas das partículas 1 e 2.

- (a) (40%) Considere como coordenadas generalizadas do sistema,  $\mathbf{q} = \{x, y, z, \theta, \phi\}$ , as coordenadas do centro de massa  $(x, y, z)$  e os ângulos  $\theta, \phi$  que definem a orientação da haste em relação a  $\hat{z}$ , i.e.

$$\begin{cases} x_1 = x - \frac{1}{2}\ell \sin\theta \cos\phi \\ y_1 = y - \frac{1}{2}\ell \sin\theta \sin\phi \\ z_1 = z - \frac{1}{2}\ell \cos\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_2 = x + \frac{1}{2}\ell \sin\theta \cos\phi \\ y_2 = y + \frac{1}{2}\ell \sin\theta \sin\phi \\ z_2 = z + \frac{1}{2}\ell \cos\theta. \end{cases}$$

Encontre a lagrangeana do sistema em termos das novas coordenadas generalizadas  $\{x, y, z, \theta, \phi\}$ .

- (b) (30%) Construa a hamiltoniana do sistema a partir da lagrangeana obtida em (a) e verifique que a mesma pode ser decomposta na forma  $H = H_{\text{cm}} + H_{\mu}$ , onde  $H_{\text{cm}}$  descreve o movimento do centro de massa ( $M = 2m$ ) e  $H_{\mu}$ , o movimento rotacional de uma partícula de massa reduzida  $\mu = m/2$  em torno do centro de massa.
- (c) (30%) Obtenha as equações de Hamilton para as coordenadas generalizadas canonicamente conjugadas  $\{x, y, z, \theta, \phi; p_x, p_y, p_z, p_{\theta}, p_{\phi}\}$ . Descreva qualitativamente a natureza do movimento do sistema.